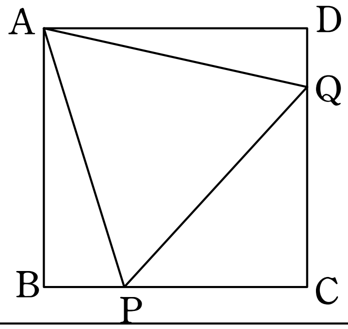
高数研　第161号　宿題
　鹿児島中央高校　堂薗幸夫　　　　　　　　　http://www.synapse.ne.jp/dozono/

宿題

[1]　長方形ABCDの辺BC，CD上に点P，Qがあり，
△APQが正三角形であるとき

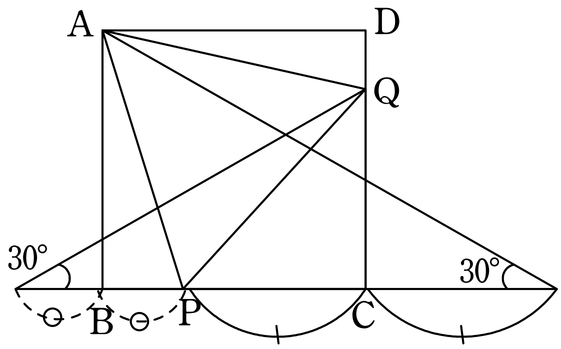
△ABPの面積＋△ADQの面積＝△CPQの面積

が成り立つことを示せ。

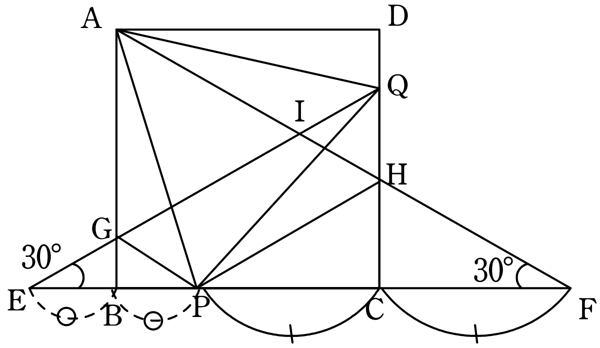


【解答その１】

右図のように，辺BC上の点Pの位置をみて，左にBPの分だけ，右にPCの分だけ延長し，
更にその点から30°の三角形をとると正三角形APQを得る。

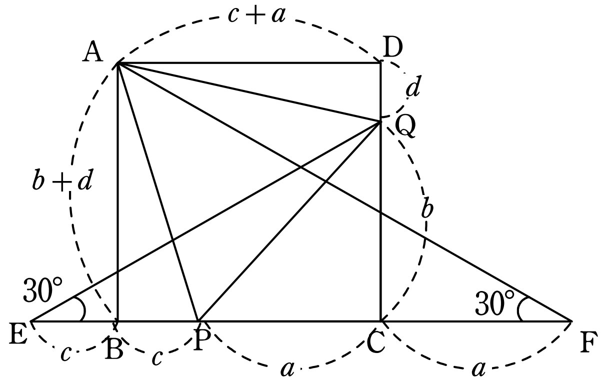


（証明）



△AIGと△QIHはともに正三角形であり，四角形HIGPは平行四辺形である。
よって，△AGP≡△AIQ≡△PHQであるので，AP＝PQ＝QAがいえる。（証明終わり）

ここで辺を，
　$PC=FC=a$，$CQ=b$，
　$EB=PB=c$，$DQ=d$ とおくと，
　$AB=b+d$，$AD=c+a$ である。



△APQが正三角形ならば，上記のとおり，$\angle E=\angle F=30°$ である。

△EQCは，$\angle E=30°$より，$1:2:\sqrt{3}$ であるので，$a+2c=\sqrt{3}\,b$…①

△FABも，$\angle F=30°$より，$1:2:\sqrt{3}$ であるので，$2a+c=\sqrt{3}(b+d)$…②　を得る。

①より，$\sqrt{3}=\dfrac{a+2c}{b}$，②より，$\sqrt{3}=\dfrac{2a+c}{b+d}$ であるので，$\dfrac{a+2c}{b}=\dfrac{2a+c}{b+d}$ を変形して，

$ab=bc+2cd+ad$ を得る。

更に変形すると，$\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}c(b+d)+\dfrac{1}{2}d(c+a)$ を得て，

題意は示された。

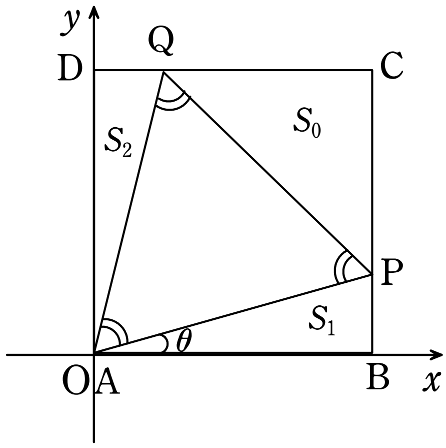
【解答その２】

右図のように，座標平面上に一辺を1とする正三角形を考え，長方形ABCD，点P，Q，および角θをとり，問題の直角三角形の面積をS_0，S_1，S_2とする。

すると，$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$にもとづいて，

$\mathrm{C}(\cos\theta, \sin(\theta+60^\circ))$，$\mathrm{D}(0, \sin(\theta+60^\circ))$

$\mathrm{Q}(\cos(\theta+60^\circ), \sin(\theta+60^\circ))$　とかける。



$$S_0=\frac{1}{2}(\sin(\theta+60^\circ)-\sin\theta)(\cos\theta-\cos(\theta+60^\circ))$$

加法定理で展開し，整理すると

$$=\frac{1}{4}\sin(2\theta+60^\circ)$$　となる。

一方，

$$S_1+S_2=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\sin(\theta+60^\circ)\cos(\theta+60^\circ)$$

であり，同様に加法定理で整理すると，$=\dfrac{1}{4}\sin(2\theta+60^\circ)$　を得て，題意は示された。

－－

（感想）

その１は，幾何的になんか意味があるはずだと考えたものです。もっとすっきりとした示し方があるとは思いますが，私の力ではこれが限界です。。。。

その２は，複素数平面的に考えて，回転と座標で力技で進めました。計算めんどくさかったので，省略しています。こちらのその２の方が先にできて，その１の幾何的な意味は後から考えたものです。Aを原点にとりましたが，おそらく対称性から△APQの重心を原点にとって進めてもできると思います。

あらためまして，あけましておめでとうございます。

センター試験の準備をしなければならないはずなのに，年末年始はこの幾何的意味をずーっと考えていました。ホントに不思議な感じですね。いろんな攻め方のある問題は楽しいですね。

「長方形に内接する正三角形」ではなくて，「正方形に内接する正三角形」（この問題でいうと一つの直角三角形に細長い長方形を加えるような感じ）という問題をどこかで見た気がします。

今年もよろしくお願いいたします。