三角形上に作られる立体の体積を区分求積法で求める

【問題】

△ABCがある。BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$とする。辺BC上をn等分し，その点を$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$とする。

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{AP_1{}^2+AP_2{}^2+\cdots+AP_n{}^2\right\}$を求めよ。

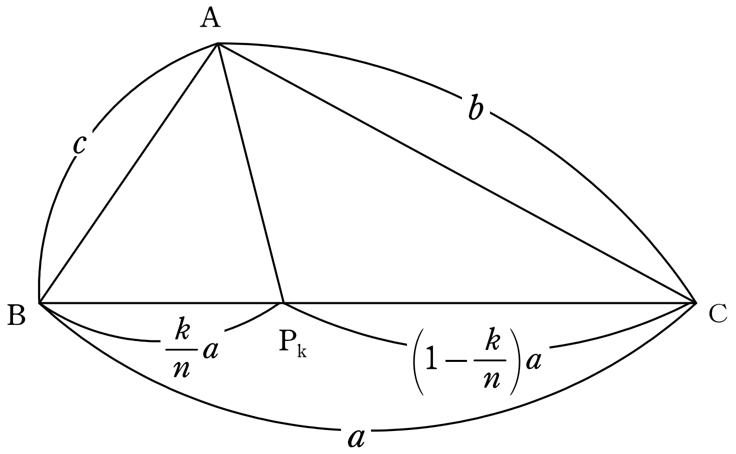
【考え方】

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{AP_1{}^2+AP_2{}^2+\cdots+AP_n{}^2\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}AP_k{}^2$　であり，区分求積法による体積を求めている。

しかし，三角形の余弦定理を地味に積み重ねていくことで計算可能である。

【解答】

下図のように△ABCとP_kと辺を考える。



P_kC間は，

$$a-\frac{k}{n}a=\left(1-\frac{k}{n}\right)a$$

と表せる。

△ABP_kにおいて

$$AP_k{}^2=c^2+\left(\frac{k}{n}a\right)^2-2c\left(\frac{k}{n}a\right)\cos B$$

$$=c^2+\frac{a^2}{n^2}k^2-\frac{2ca}{n}k\cos B$$

$$\sum_{k=1}^{n}AP_k{}^2=nc^2+\frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{2ca}{n}\cos B\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}AP_k{}^2=c^2+\frac{a^2}{6n^2}(n+1)(2n+1)-\frac{n+1}{n}ca\cos B$$

$$=c^2+\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{2n}+\frac{a^2}{6n^2}-ca\cos B-\frac{1}{n}ca\cos B$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}AP_k{}^2=c^2+\frac{a^2}{3}-ca\cos B\quad\cdots\cdots①$$

また，$\triangle \mathrm{AP_kC}$において

$$\mathrm{AP_k}^2=b^2+\left(1-\frac{k}{n}\right)^2a^2-2b\left(1-\frac{k}{n}\right)a\cos C$$

$$=b^2+a^2-\frac{2a^2}{n}k+\frac{a^2}{n^2}k^2-2ab\cos C+\frac{2ab}{n}k\cos C$$

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{AP_k}^2=nb^2+na^2-\frac{2a^2}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2nab\cos C+\frac{2ab}{n}\cos C\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{AP_k}^2=b^2+a^2-\frac{a^2}{n}(n+1)+\frac{a^2}{6n^2}(n+1)(2n+1)-2ab\cos C+\frac{n+1}{n}ab\cos C$$

$$=b^2+\cancel{a^2}-\cancel{a^2}-\frac{a^2}{n}+\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{2n}+\frac{a^2}{6n^2}-2ab\cos C+ab\cos C+\frac{1}{n}ab\cos C$$

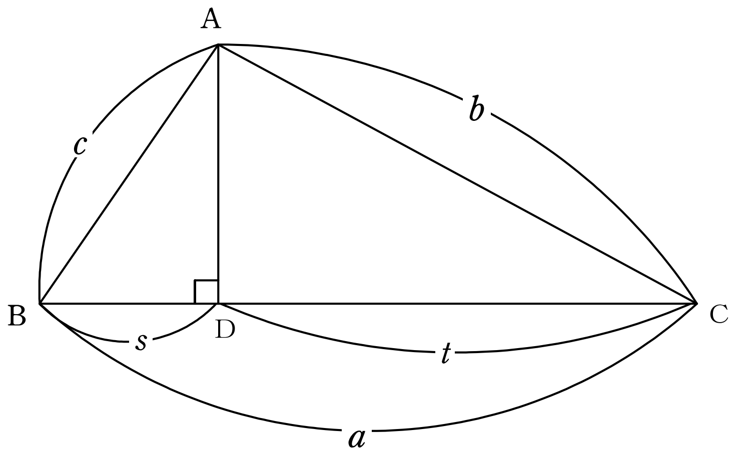
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{AP_k}^2=b^2+\frac{a^2}{3}-ab\cos C \quad \cdots\cdots②$$

$\dfrac{①+②}{2}$より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{AP_k}^2=\frac{1}{2}\left(b^2+\frac{a^2}{3}-ab\cos C+c^2+\frac{a^2}{3}-ca\cos B\right)$$

$$=\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{a^2}{3}-\frac{b\cos C+c\cos B}{2}a \quad \cdots\cdots③$$

ここで，



$a=s+t$より

$=c\cos B+b\cos C$

（第一余弦定理と呼ばれる）

よって，　$③=\dfrac{b^2+c^2}{2}+\dfrac{a^2}{3}-\dfrac{a^2}{2}$

$$=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{6}$$