〔2005-3　熊本大〕 曲線と接線とで定まる三角形の面積の和の極限

座標平面において，x 軸上の点列 $\{P_n\}$ と曲線 C : $y=\dfrac{1}{x^2}$ 上の点列 $\{Q_n\}$ を次のように定める。

$P_1(a,\ 0)$ $(a>0)$ とする。P_n $(n\geqq 1)$ が定まったとき，P_n を通り y 軸に平行な直線と C との交点を Q_n とする。Q_n における C の接線と x 軸との交点を P_{n+1} とする。

次の問に答えよ。

(1) $P_n(a_n,\ 0)$ とするとき，a_n を a で表せ。

(2) 三角形 $P_nP_{n+1}Q_n$ の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を a で表せ。

【考え方】

グラフを正確にかき，どの点を表しているのか，何を求めようとしているのかを読み取らねばならない。2項間漸化式から点列が等比数列で，三角形の面積の和が無限等比級数であることが分かれば，基本的性質を利用するだけである。

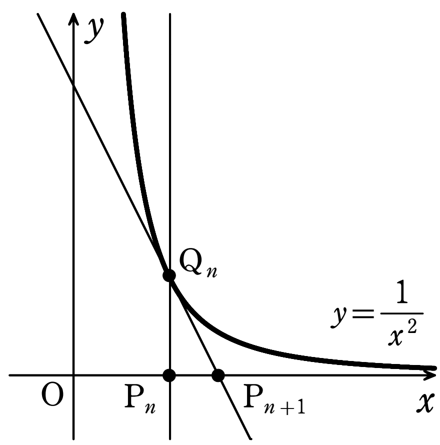
【解】

(1) $y=\dfrac{1}{x^2}$ を，xで微分すると

$$y'=\frac{0\cdot x^2-1\cdot 2x}{(x^2)^2}=-\frac{2}{x^3}$$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

の商の微分公式



よって，C上の点 $Q_n\left(a_n,\ \dfrac{1}{{a_n}^2}\right)$ における接線の方程式は

$$y=-\frac{2}{{a_n}^3}(x-a_n)+\frac{1}{{a_n}^2}$$

この接線とx軸との交点が，$P_{n+1}(a_{n+1}, 0)$なので，$y=0$ として

$$\frac{2}{{a_n}^3}(x-a_n)=\frac{1}{{a_n}^2}$$

$$\frac{2}{{a_n}^3}x-\frac{2}{{a_n}^2}=\frac{1}{{a_n}^2}$$

$x=\dfrac{3}{2}a_n$ となり，$P_{n+1}\left(\dfrac{3}{2}a_n, 0\right)$ である。

よって　$a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n$　が言える。

つまり，数列 $\{a_n\}$ は初項 a，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列であるから　$a_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}a$

(2) $S_n=\dfrac{1}{2}\cdot P_nQ_n\cdot P_nP_{n+1}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{{a_n}^2}\cdot(a_{n+1}-a_n)$　　(1)より$a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n$なので，

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{{a_n}^2}\cdot\dfrac{1}{2}a_n$

$=\dfrac{1}{4a_n}$　　(1)の結果より

三角形の面積は，(底辺)×(高さ)×$\dfrac{1}{2}$であり，

(底辺)$=P_nP_{n+1}$ ，(高さ)$=P_nQ_n$

$\{a_n\}$は公比$\dfrac{3}{2}>1$で，$a_{n+1}>a_n$だから，

よって(底辺)$=a_{n+1}-a_n$　となる。

$$=\frac{1}{4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}a}$$

$$=\frac{1}{4a}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$ となる。

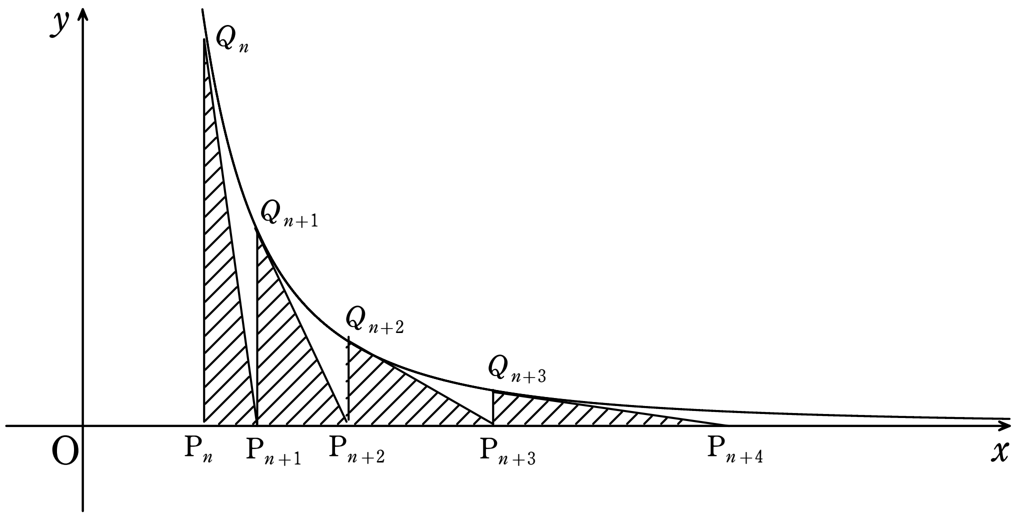
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$は，初項$\dfrac{1}{4a}$，公比$\dfrac{2}{3}$の無限等比級数であり，$\left|\dfrac{2}{3}\right|<1$ より収束する。

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{4a}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\underline{\underline{\frac{3}{4a}}}$

$-1<$(公比)<1であり，(初項)$\neq 0$ならば，無限等比級数は収束し，和の公式は，

$$\frac{\text{初項}}{1-(\text{公比})}$$

(2)を詳細に表現すると，下図のようになる。



関連事項としてニュートン法がある。

右図において

接点$(x_n,\ f(x_n))$における接線の方程式

$$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$$

が，$y=0$とすると，$x=x_{n+1}$となるので，

$$-f(x_n)=f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)$$ より

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

という2項間漸化式を得ることはこの出題の参考になる。