

3 次の条件(i), (ii), (iii)をみたす関数  $f(x)$  ( $x > 0$ ) を考える。

(i)  $f(1) = 0$

(ii) 導関数  $f'(x)$  が存在し,  $f'(x) > 0$

(iii) 第2次導関数  $f''(x)$  が存在し,  $f''(x) < 0$

(1)  $a \geq \frac{3}{2}$  のとき, つぎの3数の大きさを比較せよ。

$$f(a), \quad \frac{1}{2} \left\{ f\left(a - \frac{1}{2}\right) + f\left(a + \frac{1}{2}\right) \right\}, \quad \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} f(x) dx$$

(2) 整数  $n$  ( $n \geq 2$ ) に対して, 次の不等式が成立することを示せ。

$$\int_{\frac{3}{2}}^n f(x) dx < \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2} f(n) < \int_1^n f(x) dx$$

(3) 次の極限値を求めよ。ただし,  $\log$  は自然対数を表す。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \log n! - \log n^n}{\log n}$$

### 【考え方】

微分積分の総合的な知識が必要な難問である。問題から発せられるメッセージは, (1)では, グラフを想像できるか。平均という感覚があるか。面積はどうなっているか。といったところだろう。(2)では, 面積評価が,  $\Sigma$  と関連付けられて繋がっていくことを想像してほしい。(3)は,  $\log$  という具体的な関数が与えられているので, 何を言わんとするか解り難い極限ではあるが, (2)ができていれば, はさみうちの原理で評価できる可能性が高いだろう。書き始める前に, 想像力を豊かに方針をじっくり練って, 「問題のもつ気配」を感じ取ることが大切である。

### 【略解】

(1)  $y = f(x)$  は, (i)(ii)(iii)の条件から,  $x > 0$  において単調増加の上に凸なグラフをえがく。

$x = a$  における,  $y = f(x)$  の接線をひき, そこにできる形状で面積を評価すると,

(内接台形) < (定積分) < (外接台形) が成り立つので, ( $x$  軸方向の幅は1であることに注意)

$$\text{計算して, } \frac{1}{2} \left\{ f\left(a - \frac{1}{2}\right) + f\left(a + \frac{1}{2}\right) \right\} < \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} f(x) dx < f(a) \text{ が成り立つ。}$$

(2)  $a - \frac{1}{2}$  と  $a + \frac{1}{2}$  の幅は, 1である。この1の幅を持つ台形をぴったりと隙間なく正の方向へくっつけていくと,

(1)で得られた不等式が,  $x = 1$  から  $x = n$  までの範囲での面積評価に繋がる。(  $f(1) = 0$  も効いてくる。)

ぴったりと隙間なくくっつけたので,  $\Sigma$  の形に表現できるわけである。

つまり, (1)の結果を,  $A < B < C$  とし, (2)の示したい不等式を,  $X < Y < Z$  とするならば,

(1)の  $A < B$  の部分が, (2)の  $Y < Z$  の部分に, そして, (1)の  $B < C$  の部分が, (2)の  $X < Y$  の部分になる。

ただし, 後半の  $X$  に相当する  $\int_{\frac{3}{2}}^n$  の  $\frac{3}{2}$  の評価には, ひと手間かかるため注意が必要である。

(3) (2)が出来てさえいれば, 簡単である。(1)(2)が未解答でも, (2)の結果を利用して(3)を解いて, 部分点はもらえると思われる。合格している人はその程度の実験テクニックは身に着けているはずである。白紙だと0点に違いない!)

$f(x) = \log x$  が条件をみたすことをいい, (2)の  $X$  部と  $Z$  部について計算を進めると,  $X$  と  $Z$  の極限は一致する。

つまり, はさみうちの原理から,  $Y$  部が(3)の示したい極限値になっているわけである。

$$\int \log x dx = x \log x - x + C \text{ を想像し, 定積分で } x = n \text{ とするならば, } n \log n = \log n^n \text{ が生まれて,}$$

$\Sigma$  は  $\log 1 + \log 2 + \dots + \log n = \log n!$  へと変化していくわけである。