数研通信

数学

No. 79

Contents / 数研通信　No. 79

数研出版

http://www.chart.co.jp/

三・四・五・七角形に関する興味深い等式の紹介

堂薗(どうぞの)　幸夫(ゆきお)

§1. はじめに

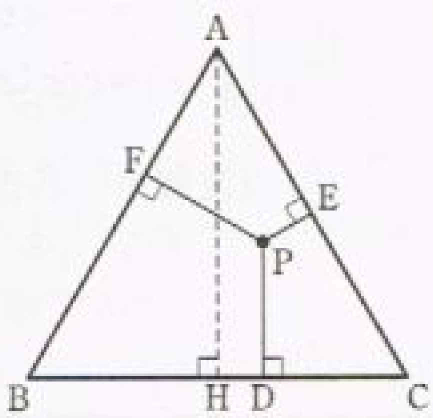
表題の多角形（特に正多角形を絡めたもの）それぞれに関して，下記に順に掲げるように興味深い等式が成り立つ。これら等式は，一見すると，そのような美しい関係が秘められているものだろうか，と疑いたくなるものばかりである。それらを証明とともに紹介し，周辺の話題についても触れてみた。

§2. 正三角形について

(1)　正三角形 ABC の内部または周上にある任意の点 P から，各辺に下した垂線の長さの和は，正三角形の高さに等しい。つまり，右図で

$PD+PE+PF=AH$

が成り立つ。



証明

面積で考え，正三角形の一辺の長さを a とすると，$\triangle ABP+\triangle BPC+\triangle CPA=\triangle ABC$ であるから，

$\frac{1}{2}a PD+\frac{1}{2}a PE+\frac{1}{2}a PF=\frac{1}{2}a AH$ より

$PD+PE+PF=AH$ が成り立つ。

参考

別の証明として，△ABC を左方向に辺 AC が P を通るように平行移動する方法も考えられる。この定理は，ヴィヴィアーニの定理と呼ばれている。証明は中学生でも理解できるものであるが，任意の点 P でこの等式が成り立つという点に不思議さを感じる。

(2)　正三角形 ABC について，一辺の長さを a とする。外接円の半径を R とするとき，

$a^2=3R^2$　が成り立つ。

証明

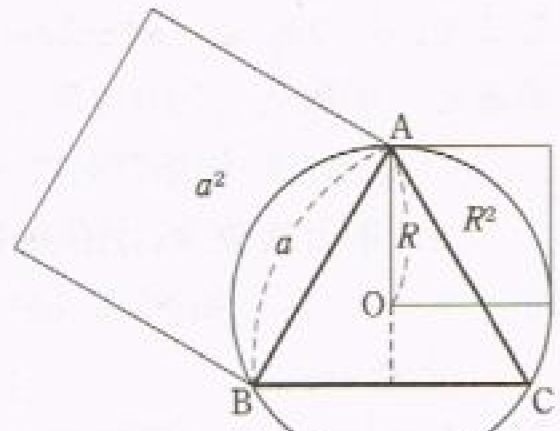
正弦定理で，

$\frac{a}{\sin 60^\circ}=2R$ より

$R=\frac{a}{\sqrt{3}}$

したがって，

$a^2 : R^2=3:1$



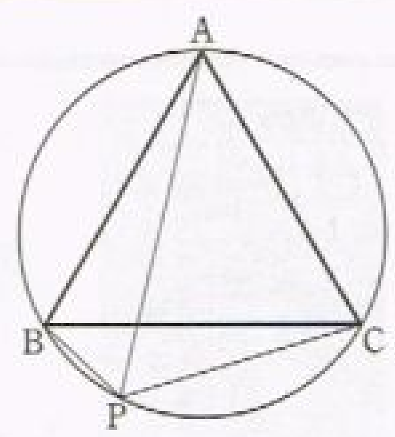
参考

簡単な証明である。正弦定理を用いたが，ユークリッドの原論においては，正六角形を利用して証明している。ここでは平方の比が，3 : 1 となるところが無理数の存在を主張しているかのようで興味深い。

(3)　正三角形 ABC と外接円を考える。図のように，弧 BC 上に点 P をとると，

$AP=BP+PC$

である。



証明

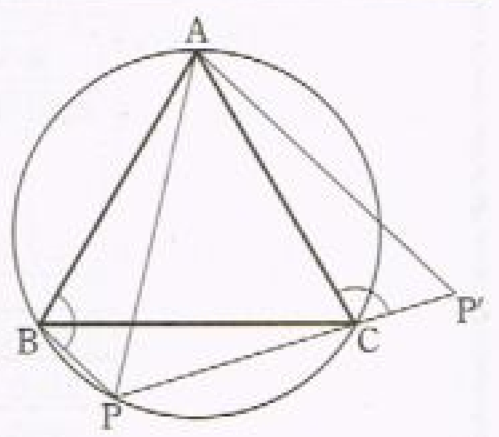
PC の延長上に，$BP=CP'$ となるような点 P′ をとると，

$\triangle ABP \equiv ACP'$

である。したがって，

$AP=BP+PC$

が成り立つ。



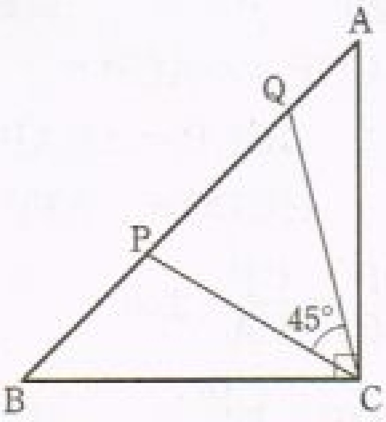
参考

任意の点 P について成り立つという点はやはり興味深く，等式も美しい。この図形をみると，一般的には方べきの定理の「掛け算の式」が思い浮かぶのが常かもしれない。ここに，「足し算の式」が成り立

つことは，何か発展的な問題が作成できそうな気配を感じる。§5(2)のトレミーの定理でも証明できる。

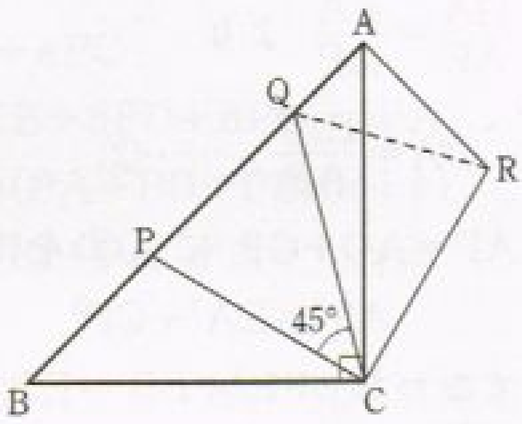
§3. 直角二等辺三角形について

直角二等辺三角形ABCの辺BA上に，$\angle PCQ=45^\circ$ となるように点P，Qを図のようにとる。
このとき，
$PQ^2=BP^2+AQ^2$
が成り立つ。



証明

回転移動を考える。
△BPCをCを中心に辺BCが，辺ACに重なるように90°回転し，Pの移動先をRとする。



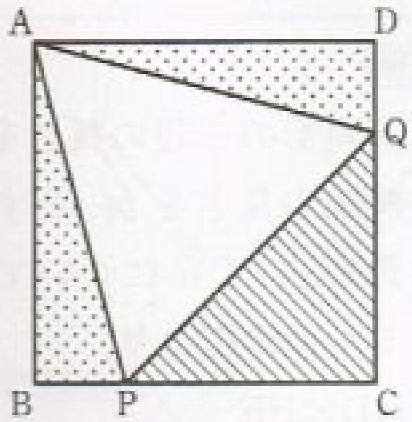
△BPC≡△ARC
であるから，BP=AR
線分CQについてPとRは対称であるから
PQ=RQ
また，$\angle RAQ=90^\circ$ であるから，
△RAQの三平方の定理より
$RQ^2=AR^2+AQ^2$
が成り立つ。よって，$PQ^2=BP^2+AQ^2$ である。

参考

一般の四角形ABCDで成り立つ等式を，直角三角形に拡張したものがこの等式である。通常ならば，拡張は逆の方向で得られそうなものであるが，特殊化した直角三角形で，この美しい等式が見られる。

§4. 正三角形と四角形について

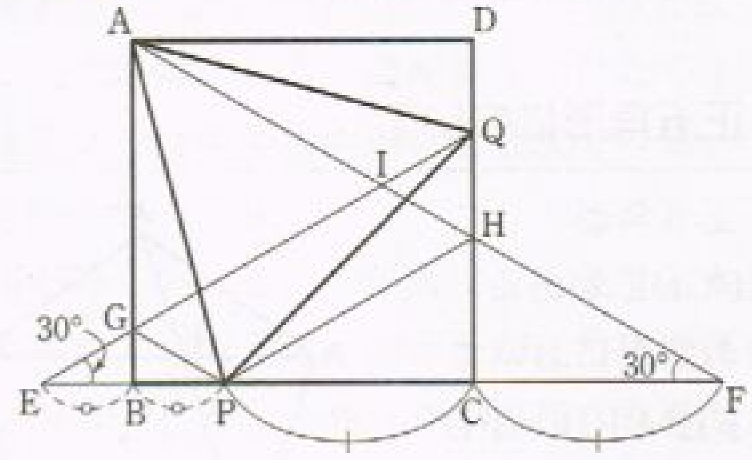
正三角形と長方形を組み合わせた右のような図形がある。
長方形ABCDの辺BC，CD上に点P，Qがあり，△APQが正三角形であるとき



(△ABPの面積)+(△ADQの面積)
=(△CPQの面積)　が成り立つ。

補題

下図のように，辺BC上の点Pの位置をみて，左にBPの分だけ，右にPCの分だけ延長し，更にその点からそれぞれ30°の線分をとると正三角形APQを得る。



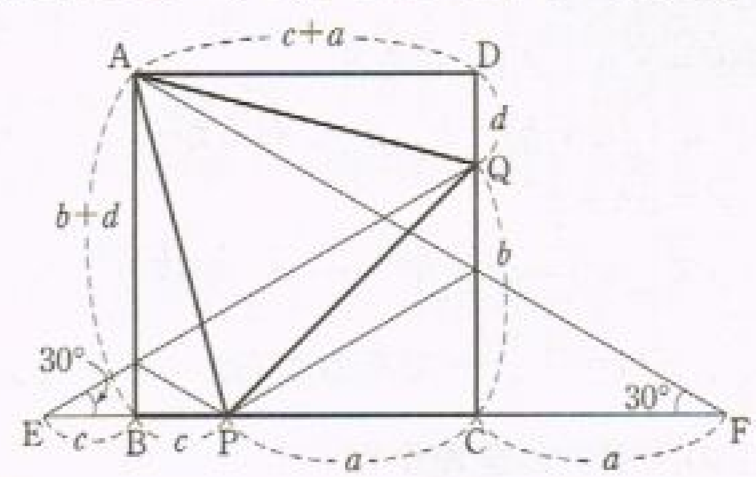
証明

△AIGと△QIHはともに正三角形であり，四角形HIGPは平行四辺形である。
よって，△AGP≡△AIQ≡△PHQ であるので，AP=PQ=QA がいえる。(証明終わり)

△ABP+△ADQ=△CPQ の証明

証明

ここで辺を，
$PC=FC=a$，$CQ=b$，$EB=PB=c$，$DQ=d$
とおくと，$AB=b+d$，$AD=c+a$ である。



補題のとおり，△APQが正三角形ならば，上記のとおり，$\angle E=\angle F=30^\circ$ である。
△EQCは，$\angle E=30^\circ$ より，$1:2:\sqrt{3}$ であるので，
$a+2c=\sqrt{3}\,b$ ……①
△FABも，$\angle F=30^\circ$ より，$1:2:\sqrt{3}$ であるので，
$2a+c=\sqrt{3}(b+d)$ ……② を得る。
①より，$\sqrt{3}=\dfrac{a+2c}{b}$，②より，$\sqrt{3}=\dfrac{2a+c}{b+d}$ であるので，$\dfrac{a+2c}{b}=\dfrac{2a+c}{b+d}$ が成り立ち，変形して，
$ab=bc+2cd+ad$
を得る。更に変形すると，

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c(b+d)+\frac{1}{2}d(c+a)$$

を得て，面積の関係式が示された。

参考

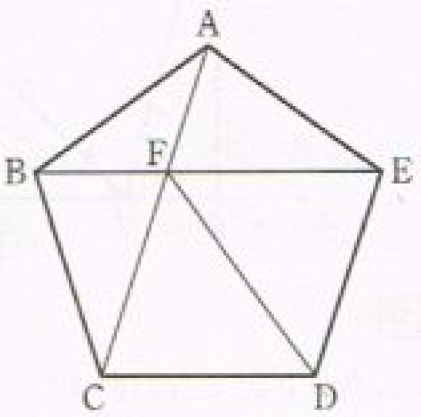
角を動かし，三角比を利用して証明することも考えられるが，この証明方法は，幾何的意味づけが出来たと思える。まさに正三角形の周辺には，不思議な関係が見られるものである。

§5. 正五角形について

(1) 正五角形 ABCDE がある。この図形において

$FE^2+FB^2=FD^2$

が成り立つ。



証明

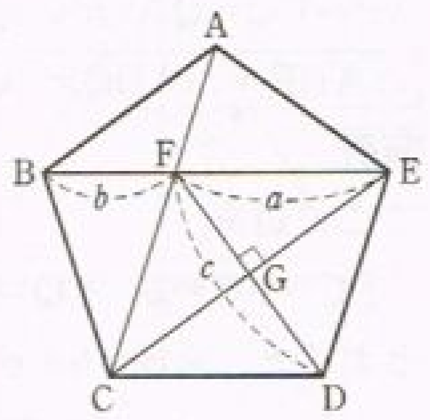
$FE=a$，$FB=b$，$FD=c$ とおく。

EC を引き，FD との交点をGとする。

ここで，$EC\perp FD$

$\triangle ABE\backsim\triangle FAB$ より

$AB:BE=FA:AB$ である。



つまり，$a:(a+b)=b:a$ であるから

$$a^2=ab+b^2$$

したがって，$ab=a^2-b^2$ ……① が成り立つ。

$FG=\frac{c}{2}$，$EG=\frac{a+b}{2}$ であるから，

$\triangle EFG$ の三平方の定理から

$$a^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

が成り立ち，①より

$$a^2=\frac{c^2+a^2+2(a^2-b^2)+b^2}{4}$$

となり，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つ。

参考

$a:b$ は，黄金比であることはよく知られている。それを利用して，72° の角度や，複素数平面上で座標設定をし，証明する方法も考えられる。

ここで，ユークリッドの原論において，a は正五角形の辺長であり，b は同一円に内接する正十角形の辺長，同じく c は正六角形の辺長であることが，既に述べられている。

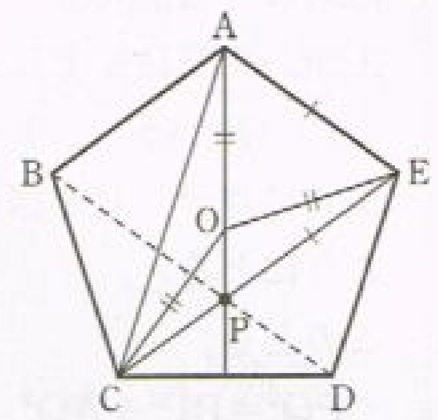
以下は，同じ問題を過去に生徒に出題したところ，スマートな証明が見られたため紹介する。

証明

$\triangle COP\backsim\triangle ACP$

$\because$ $\angle OCP=\angle CAP$

$\angle CPO=\angle APC$



$\frac{OP}{PC}=\frac{CP}{PA}$ より

$$OP=\frac{CP^2}{PA} \quad \cdots\cdots①$$

$\triangle AOE\backsim\triangle AEP$

$\because$ $\angle APE=\angle PAE=\angle OEA$

$\frac{OA}{AE}=\frac{EA}{AP}$ より

$$OA=\frac{EA^2}{AP} \quad \cdots\cdots②$$

$AP=AO+OP$ に①②を代入すると，

$$AP^2=EA^2+CP^2$$

すなわち，$FE^2+FB^2=FD^2$ が成り立つ。

参考

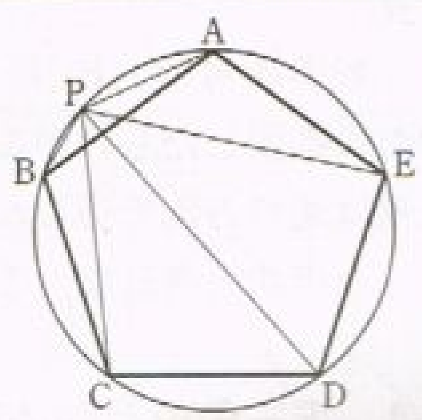
数学（特に幾何）を得意とする生徒であった。中心Oに気づき，相似を発見するところは柔軟な発想ができる若者ならではと思える。しかし，逆を類推し，等式が成り立つならばこのような関係があるはずである，と辿っていくことも可能であろう。特に正五角形においては黄金比との関係から，まだまだ興味深い関係はたくさん隠されているように思える。

(2) 正五角形 ABCDE とその外接円がある。弧 AB 上に点Pをとると

$PC+PE$

$=PB+PD+PA$

が成り立つ。



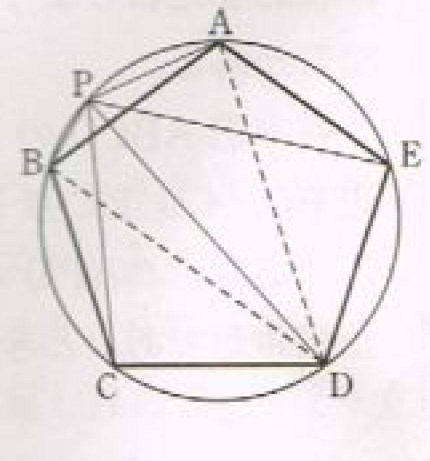
証明

正五角形の一辺の長さを a，対角線の長さを b，とする。

四角形 APDE についてトレミーの定理より，

$AD\times PE$

$=AP\times ED+AE\times PD$



つまり，

$bPE = aPA + aPD$ ……①

四角形 BPDC について，同様に

$bPC = aPB + aPD$ ……②

四角形 PEDC について，同様に

$bPD = aPE + aPC$

つまり，

$aPE + aPC = bPD$ ……③

四角形 PADB について，同様に

$aPD = bPB + bPA$ ……④

これら①～④を辺々加えると，

$$bPE + bPC + aPE + aPC + aPD$$
$$= aPA + aPD + aPB + aPD + bPD + bPB + bPA$$

両辺から，aPD を引き，

$$bPE + bPC + aPE + aPC$$
$$= aPA + aPD + aPB + bPD + bPB + bPA$$
$$(PE + PC)(a + b) = (PA + PD + PB)(a + b)$$

$\therefore$ PC＋PE＝PB＋PD＋PA が成り立つ。

参考

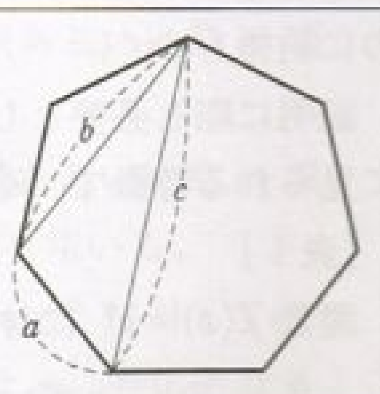
弧 AB 上の任意の点 P について成り立つ。交互に頂点と結ぶ線分の長さの和が等しいというところに，美しさを感じる。円に内接する対称的な四角形から，トレミーの定理（プトレマイオスの定理）を組み合わせることによって証明される。

§6. 正七角形について

正七角形において，右図のように辺長を a，対角線の長さを b, c とすると，

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

が成り立つ。

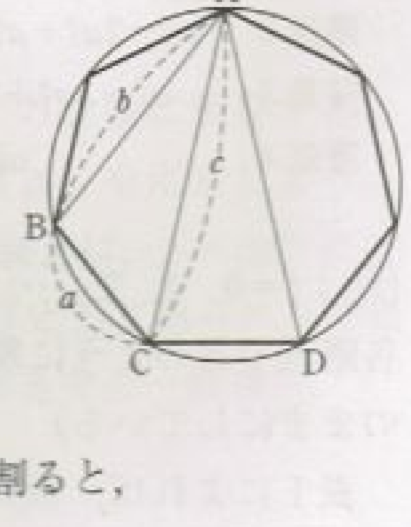


証明

正七角形は円に内接する。四角形 ABCD も円に内接する。トレミーの定理より

AC×BD＝
BC×AD＋AB×CD

が成り立つ。



よって，

$cb = ac + ba$ であり，abc で割ると，

$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ が成り立つ。

参考

正七角形は，おそらく教科書等にもほとんど登場しない形状であろう。しかし円に内接する四角形 ABCD におけるトレミーの定理からあっさり証明される。

円に内接する四角形は頻出である。幾何的にも方べきの定理など重要なものが散見されるが，トレミーの定理と正弦定理・余弦定理等を組み合わせると，更に発展的に加法定理や倍角・半角の公式などの様々な公式が得られる。辺長を a ではなく 1 とすると，次のような関係式の形にも表現できる。

$$b + c = bc$$

和と積が等しい，という等式は，一見すると相加平均相乗平均との関連性も伺えるが，特段関係はないようである。しかし，やはり不思議さを感じる。

§7. おわりに

上記のように，それぞれ独立したものではあるが，各多角形には，興味深い等式が成り立つ。授業の本道ではないかもしれないが，興味をもつ生徒に対しては，十分意味ある問題であると考える。私自身が初等幾何を得意とするわけではなく，また授業の中でもセンターレベルの三角比に関する図形の問題程度しか扱う機会も少なく，今回の様々な多角形についてまとめを行ってみるきっかけとなった。

新教育課程においては複素数平面が復活し，図形の処理を回転を利用して考えることも増えてきている。これらの証明も，複素数平面上で考えると更に興味深いものになると思われる。このレポートのように，正多角形においての教材研究を進めることは意味あることと考える。

http://www.synapse.ne.jp/dozono/

上記の私のホームページにおいて，その他関連することを紹介している。興味ある方はご覧いただいて，ご指摘やご教授頂けると幸いである。

《参考文献》

〔1〕 モノグラフ　改訂版幾何学
清宮俊雄著　科学新興新社

〔2〕 BLUE BACKS　三角形の七不思議
細矢治夫著　講談社

〔3〕 証明の展覧会〈1〉〈2〉眺めて愉しむ数学
ロジャー・B.ニールセン著　東海大学出版会編

（鹿児島県立鹿児島中央高等学校）