京都大学　2005年理系の5番　　y＝cosxのグラフの交点など

【問題】

k を正の整数とし，$2k\pi \leqq x \leqq (2k+1)\pi$ の範囲で定義された2曲線

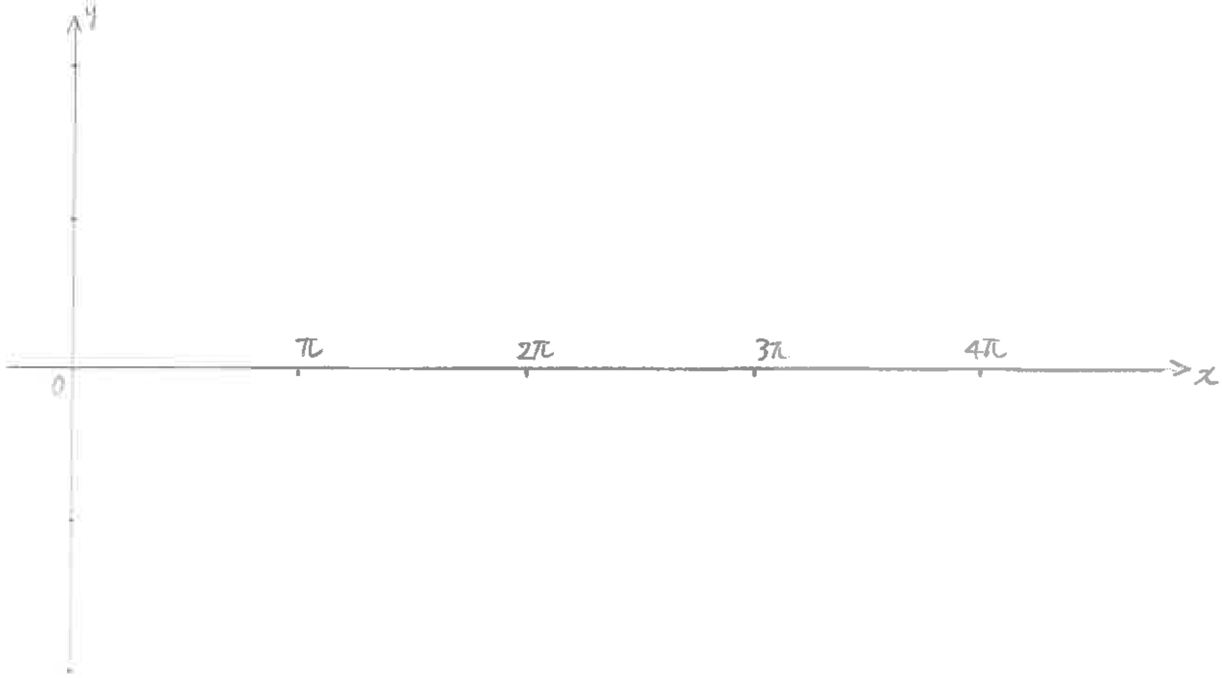
$$C_1 : y=\cos x \quad , \quad C_2 : y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

を考える。

(1)　C_1 と C_2 は共有点をもつことを示し，その点における C_1 の接線は点$(0,1)$を通ることを示せ。

(2)　C_1 と C_2 の共有点はただ1つであることを証明せよ。

グラフ化してみよう！



(1)　【解】

$f(x)=\cos x$, $g(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, $h(x)=f(x)-g(x)$ とおく

$$h(2k\pi)=1-\frac{1-(2k\pi)^2}{1+(2k\pi)^2}=\frac{2(2k\pi)^2}{1+(2k\pi)^2}=\frac{8k^2\pi^2}{1+4k^2\pi^2}>0$$

$$h((2k+1)\pi)=-1-\frac{1-(2k+1)^2\pi^2}{1+(2k+1)^2\pi^2}=\frac{-2}{1+(2k+1)^2\pi^2}<0$$

であり，$h(x)$ は，$2k\pi\leqq x\leqq(2k+1)\pi$ で連続なので，中間値の定理から，

$h(\alpha)=0$ かつ，$2k\pi<\alpha<(2k+1)\pi$ となる α が少なくとも1つ存在する。

よって，C_1 と C_2 は共有点をもつ。

この共有点における C_1 の接線の方程式は，

$f(x)=\cos x$ から，$f'(x)=-\sin x$ なので，点 $(\alpha, f(\alpha))$ では，

$y-\cos\alpha=-\sin\alpha(x-\alpha)$　……① であり

$x=0$ とすると，$y=\alpha\sin\alpha+\cos\alpha$　……②

共有点は，$f(\alpha)=g(\alpha)$ を満たすので，$\cos\alpha=\dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$ である。$2k\pi<\alpha<(2k+1)\pi$ では，$\sin\alpha>0$ より，

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{4\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}}=\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$$

よって，②は，$y=\alpha\cdot\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}+\dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}=1$ となり，接線①は，点 $(0, 1)$ を通る。

(2)　【解】

$g'(x)=\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$ より，$g(x)$ は，$2k\pi\leqq x\leqq(2k+1)\pi$ で単調減少

$$g(2k\pi)=\frac{1-(2k\pi)^2}{1+(2k\pi)^2}<0$$

$2k\pi\leqq x\leqq 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ で，$f(x)\geqq 0$　であり，$2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x\leqq 2k\pi+\pi$ で，$f(x)<0$ である。

よって，C_1 と C_2 の共有点の x 座標 α は，$2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<\alpha\leqq 2k\pi+\pi$ の範囲にある。

点 $(0, 1)$ から，C_1 に引いた接線は，接点を $(t, \cos t)$ とすると，

$y-\cos t=-\sin t(x-t)$　（ただし，$2k\pi<t<(2k+1)\pi$ ）であり

点 $(0, 1)$ を通ることより，$1-\cos t=-\sin t(0-t)$

つまり，$t\sin t+\cos t-1=0$

$H(t)=t\sin t+\cos t-1$ とおくと，

$H'(t)=\sin t+t\cos t-\sin t=t\cos t$ となり，$H'(t)=0$ となるのは，$\cos t=0$ より，$t=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

増減表は，

t	$2k\pi$	$\cdots$	$2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$2k\pi+\pi$
$H'(t)$		$+$	0	$-$	
$H(t)$	(0)	↗		↘	(-2)

となり，$2k\pi<t<(2k+1)\pi$ の範囲に，$H(t)=0$ となる t がただ1つだけ存在する。

つまり，点 $(0, 1)$ を通る接線の，C_1 上の接点は1個だけである。ゆえに，C_1 と C_2 の共有点はただ1つである。

【学習院大学】

(1)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。$\log(1+x)-x+\dfrac{3x^2}{5(1+x)} \geqq 0$

(2)　nが3以上の整数のとき，次の不等式を数学的帰納法によって証明せよ。ただし，$\log 2=0.693\cdots$ とする。

$$1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1) \leqq \frac{3n}{5(n+1)}$$

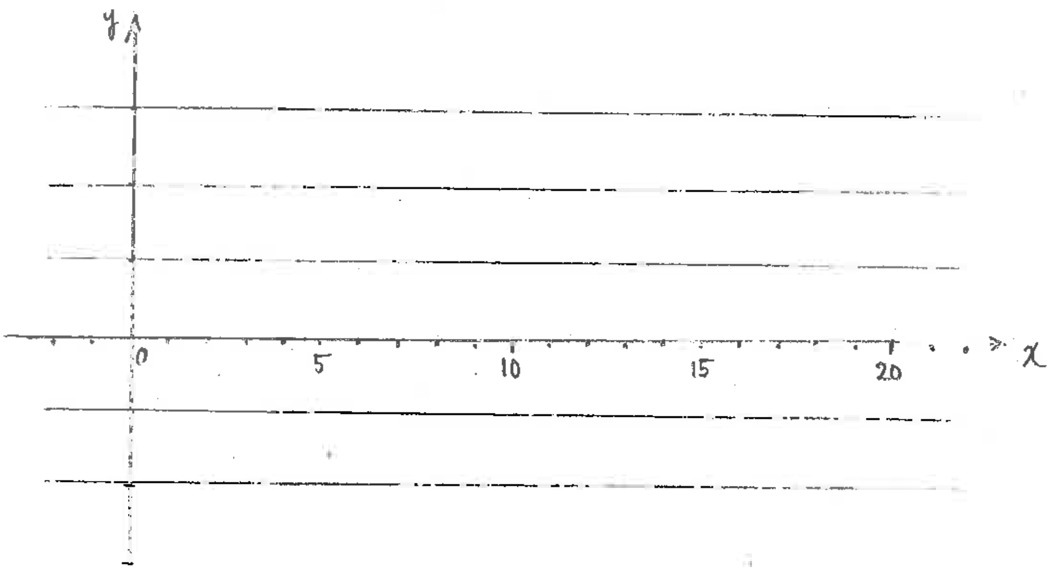
【防衛医科大学】

$A_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}$　$(n=1,2,3,\cdots)$とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(A_n-\log n)=C$ となることが知られている。ただし，$\log n$ は自然対数で，Cは正の定数である。

これを利用して，$B_n=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$とおくとき，数列$\{B_n-K\log n\}$が収束するように定数Kの値を定めよ。また，極限値をCを用いて表せ。

グラフ化してみよう！

$e \fallingdotseq$　　　$e^2 \fallingdotseq$　　　$e^3 \fallingdotseq$



【参考】　これらの問題の背景について

調和級数（防衛医科大学のA_nの部分）の増え方が，極限において対数関数に等しいこと，つまり調和級数と対数関数との差はある定数に収束していることを意味している。この定数は，オイラー マスケローニ定数(Euler−Mascheroni constant)または，オイラーのγ(Euler's gamma)とも呼ばれている。

その値は，実際には，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)\right)=0.5772\cdots$であることが知られている。

しかし，オイラーの定数は超越数であろうと予想されているが，無理数であるかどうかさえ分かっていない。

調和級数が発散するという事実は，教科書にも出てくる微分積分学の初歩であるが，古くは収束すると考えられていた。

つまり，教科書では，

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)=\infty$ ということを，$\lim_{x\to\infty}\log x=\infty$ から評価している。

逆に，無限等比級数の

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)=2$$

のような，収束する状態と比較すると面白い。ほんの少しの違いに見えるが，その実際は大きく異なっている。

学習院大学の問題では，

証明すべき，$1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)\leqq\frac{3n}{5(n+1)}$ という式について

（右辺）の極限をとると，$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{5(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{5+\frac{5}{n}}=\frac{3}{5}=0.6$ したがって（左辺）の極限は，0.6以下になることを示していて興味深い。

防衛医科大学の問題では，これらの性質を知識として持っていれば，$\frac{1}{2}$という値を予測することができる。

【学習院大学】

【解】

(1) $f(x)=\log(1+x)-x+\dfrac{3x^2}{5(1+x)}$ とおく

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+\frac{5}{3}\times\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}\quad=\frac{-x(2x-1)}{5(1+x)^2}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\dfrac{1}{2}$

よって，$0<x<\dfrac{1}{2}$ で，$f'(x)>0$だから，$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ で$f(x)$は増加

$f(0)=\log 1=0$　よって，$f(x)\geqq 0$　となり，与式は成り立つ。

(2) 与式は，$n=3$のとき，

(左辺) $=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\log 4=\dfrac{11}{6}-2\log 2=1.833\cdots-1.386\cdots=0.447\cdots$

(右辺) $=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{20}=0.45$　　　よって，(左辺) $\leqq$ (右辺) となり，成り立つ

次に，

$n=k$ ($k\geqq 3$) のとき，与式が成り立つとすると，

$1+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k}-\log(k+1)\leqq\dfrac{3k}{5(k+1)}$　……①　が成り立ち，

$n=k+1$としたとき，

(左辺) $=1+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}-\log(k+2)$

$$=\left\{\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}\right)-\log(k+1)}_{\text{①より}}\right\}+\frac{1}{k+1}+\log(k+1)-\log(k+2)$$

$$\leqq\frac{3k}{5(k+1)}+\frac{1}{k+1}-\log\frac{k+2}{k+1}$$

$$=\frac{3k}{5(k+1)}+\underbrace{\frac{1}{k+1}-\log\left(1+\frac{1}{k+1}\right)}_{\text{(1)で}x=\frac{1}{k+1}\text{としたものだから，}}$$

$$\leqq\frac{3k}{5(k+1)}+\frac{3\left(\frac{1}{k+1}\right)^2}{5\left(1+\frac{1}{k+1}\right)}$$

$$=\frac{3k}{5(k+1)}+\frac{3}{5(k+1)^2+5(k+1)}$$

$$=\frac{3k(k+2)}{5(k+1)(k+2)}+\frac{3}{5(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{3(k+1)^2}{5(k+1)(k+2)}\quad=\frac{3(k+1)}{5(k+2)}$$

となり，①の右辺のkを$k+1$としたものと等しい

したがって，$n=k+1$のときも，与式は成り立つ

したがって，$n\geqq 3$である，すべての自然数nに対して，与式は成り立つ

【防衛医科大学】

【解】

A_{2n} を考える。

$$A_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=B_n+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
$$=B_n+\frac{1}{2}A_n$$

と変形できる。この式から，$A_{2n}-\log(2n)$ を考えると，

$$A_{2n}-\log(2n)=B_n+\frac{1}{2}A_n-\log(2n)$$
$$=B_n+\frac{1}{2}A_n-\log 2-\log n$$
$$=B_n+\frac{1}{2}A_n-\log 2-\left(\frac{1}{2}\log n+\frac{1}{2}\log n\right)$$
$$=\left(B_n-\frac{1}{2}\log n\right)+\frac{1}{2}(A_n-\log n)-\log 2$$

となる。これを移項すると，

$$B_n=A_{2n}-\log(2n)-\frac{1}{2}(A_n-\log n)+\log 2+\frac{1}{2}\log n$$ を得る。

したがって，数列 $\{B_n-K\log n\}$ は，

$$B_n-K\log n=\{A_{2n}-\log(2n)\}-\frac{1}{2}(A_n-\log n)+\log 2+\frac{1}{2}\log n-K\log n$$
$$=\{A_{2n}-\log(2n)\}-\frac{1}{2}(A_n-\log n)+\log 2+\left(\frac{1}{2}-K\right)\log n$$

これが収束するためには，$K=\frac{1}{2}$ でなければならない。

その極限値は，$\lim_{n\to\infty}(A_n-\log n)=C$ ，　$\lim_{n\to\infty}(A_{2n}-\log(2n))=C$ であるから，

$$C-\frac{1}{2}C+\log 2=\frac{1}{2}C+\log 2$$ である。

東北大学　1999年(平成11年)後期　　パラメータ表示の積分による面積

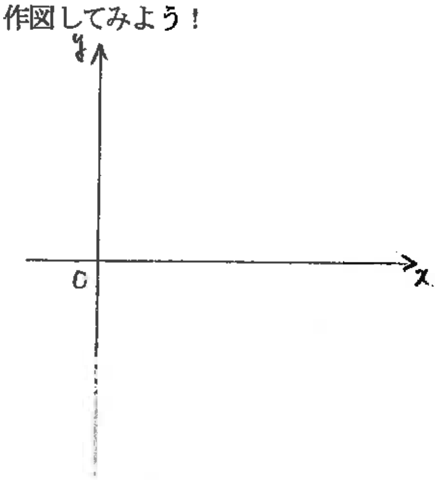
【問題】

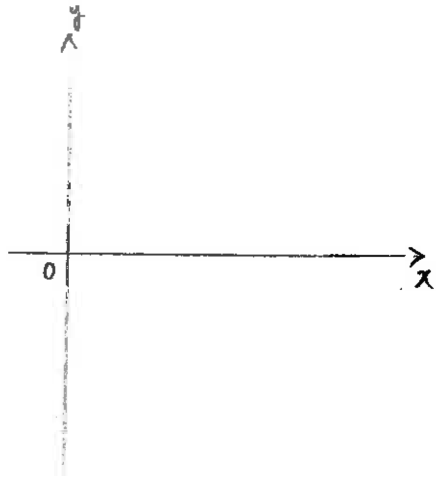
原点を中心として回転する半直線LとLに接しながら動く半径1の円Cがある。時刻$t=0$では，半直線Lはy軸の負の部分に一致しており，円Cは中心が$(1,0)$にあって原点でLに接しているとする。時刻tでは，半直線Lは原点を中心に正の向きにtだけ回転し，CはL上を滑らずにころがって原点から$2t$の距離の点RでLに接しているとする。
円の中心をPとする。点QはCの周上の定点で$t=0$では原点にあるとする。

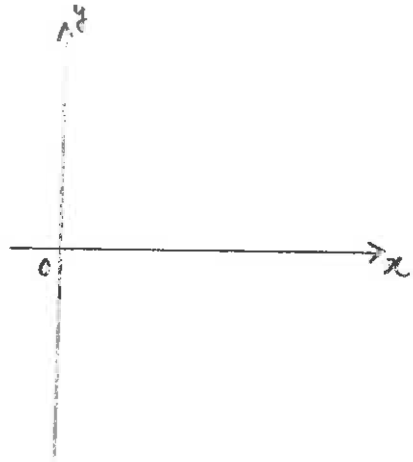
(1)　時刻tでのPとQの座標を媒介変数tで表せ。

(2)　tが0から$\dfrac{\pi}{2}$まで動くときのPの軌跡をK_1とし，Qの軌跡をK_2とする。$(0,0)$と$(1,0)$を結ぶ線分，$(\pi,1)$と$(\pi,2)$を結ぶ線分およびK_1とK_2で囲まれる部分の面積を求めよ。

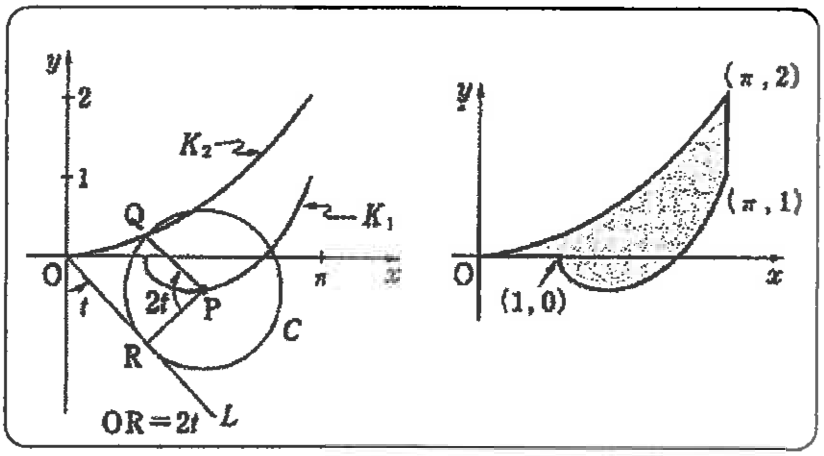
作図してみよう！







(1)　【解】



$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RP}$であり

$\overrightarrow{OR}=2t(\cos\theta,\sin\theta)$　　$\theta=-\dfrac{\pi}{2}+t$より

$=2t\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}+t\right),\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}+t\right)\right)$

$=2t(\sin t,-\cos t)$

$\overrightarrow{RP}=1(\cos t,\sin t)$　より

$\overrightarrow{OP}=2t(\sin t,-\cos t)+(\cos t,\sin t)$

$=(2t\sin t+\cos t,-2t\cos t+\sin t)$

よって，点Pのパラメータ表示は，$\begin{cases}x=2t\sin t+\cos t\\ y=-2t\cos t+\sin t\end{cases}$

また，$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$であり，

$\overrightarrow{PQ}=(\cos(\pi-t),\sin(\pi-t))=(-\cos t,\sin t)$だから，

$\overrightarrow{OQ}=(2t\sin t+\cos t,-2t\cos t+\sin t)+(-\cos t,\sin t)$

$=(2t\sin t,-2t\cos t+2\sin t)$

よって，点Qのパラメータ表示は，$\begin{cases}x=2t\sin t\\ y=-2t\cos t+2\sin t\end{cases}$

(2)　【解】

(1)より　点P：$\begin{cases}x_1=2t\sin t+\cos t\\ y_1=-2t\cos t+\sin t\end{cases}$　点Q：$\begin{cases}x_2=2t\sin t\\ y_2=-2t\cos t+2\sin t\end{cases}$　とおくと

求める部分のSは，次の積分で表される。

$S=\displaystyle\int_0^{\pi}y_2dx_2-\int_1^{\pi}y_1dx_1$

x_1	1	→	π
x_2	0	→	π
t	0	→	$\dfrac{\pi}{2}$

なので置換積分して

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}y_2\frac{dx_2}{dt}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}y_1\frac{dx_1}{dt}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2t\cos t+2\sin t)(2t\sin t)'dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2t\cos t+\sin t)(2t\sin t+\cos t)'dt$$

ここで，$(2t\sin t)'=2\sin t+2t\cos t$，$(2t\sin t+\cos t)'=2\sin t+2t\cos t-\sin t=\sin t+2t\cos t$より，

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\sin^2 t-4t^2\cos^2 t)dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t+4t^2\cos^2 t)dt$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{3}{2}\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{4}\pi$$

【テーマ】・回転する半直線とその上を転がる円の中心と円周上の点のパラメータ表示

（動く半直線上を転がるため，単なるx軸上に描かれるサイクロイドよりも難しい。）

・上記によって描く曲線に囲まれる部分の面積（領域が図示されている。定積分の利用は推測がつく。）

・ベクトルと媒介変数表示と積分との総合的な知識が必要である。